Universidad Simón Bolıvar.
Departamento de Matemáticas puras y aplicadas.
MA1111. Primer Parcial. Sept-Dic 2009 (25 pts).

Nombre:________________________Carnét:________________________

1. Responda con verdadero o falso, cada una de las siguientes proposiciones, justificando su respuesta. Esto significa, que debe proporcionar una demostración si responde verdadero o un contraejemplo si responde falso. (5 pts, 1 pt cada item)

   a) La distancia entre los puntos $(a+b, a)$ y $(a-b, a)$ es igual a $|2b|$.

   b) Si $|x| < |y|$, entonces $x < y$.

   c) Si f y g son funciones pares, entonces $f+g$ es una función par.

   d) Si $|r| \leq 1$, entonces $\frac{1}{4} \leq \frac{1}{1-r} \leq \frac{1}{2}$.

   e) $\sqrt{x^2} = x$ para todo número real x.

2. Dada la inecuación
$$|4-x| + |2x-1| \leq 4,$$
determine el conjunto solución en la recta real y exprese este conjunto en la notación de intervalo. (5 pts)

3. Sea la función definida por $f(x) = 4 - \sqrt[3]{x-3}$.

   a) Demuestre que f es una función inyectiva. (2 pts)

   b) Hallar su inversa (2 pts)

   c) Graficar f y f^{-1} en un mismo sistema de coordenadas. (2 pts)

4. Dadas las funciones definidas por $g(x) = x^2 - 14x + 49$ y
$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x < 0 \\ \sqrt{x}, & \text{si } x \geq 0, \end{cases}$$
determine si es válida la función $f(g(x))$ y en caso afirmativo, dar la fórmula para $f(g(x))$. (5 pts)

5. Entre todas las rectas perpendiculares a $4x - y = 2$, encuentre la ecuación de aquella que, junto con la parte positiva del eje X y la parte positiva del eje Y, forma un triángulo de área igual a 8. (Resuelva de forma gráfica y analítica). (4 pts)

Observación: Se evaluarán la redacción, el procedimento y los resultados. ¡Suerte!

Respuestas:

Respuesta 1:

a) Verdadero. Aplicando la definición de distancia entre dos puntos P y Q con $P = (a+b, a)$ y $Q = (a-b, a)$, obtenemos que

$$d(P,Q) = \sqrt{[(a+b)-(a-b)]^2 + (a-a)^2} = \sqrt{4b^2} = 2|b|$$

b) Falso. Basta considerar $x = -1$ e $y = -2$, así tenemos que se cumple que $1 = |x| < |y| = 2$, pero $x > y$.

c) Verdadero. Como f y g son dos funciones pares tenemos que, para todo valor real x,

$$f(-x) = f(x) \quad \text{y} \quad g(-x) = g(x).$$

Entonces sumando

$$(f+g)(-x) = f(-x) + g(-x) = f(x) + g(x) = (f+g)(x).$$

d) Falso. Dado que $|r| \leq 1$, entonces $-1 \leq r \leq 1$ lo que implica que $0 \leq 1 - r \leq 2$ y como la función $h(x) = \frac{1}{x}$ es decreciente, tenemos que $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{1-r}$. Basta tomar $r = 1/2$, así $\frac{1}{1-r} = 2$.

e) Falso. Basta considerar $x = -2$, así $\sqrt{(-2)^2} = 2 \neq -2$.

Respuesta 2:

De la definiciones,

$$|4-x| = \begin{cases} 4-x, & \text{si } x \leq 4 \\ x-4 & \text{si } x > 4 \end{cases} \quad \text{y} \quad |2x-1| = \begin{cases} 2x-1, & \text{si } x \geq 1/2 \\ -2x+1 & \text{si } x < 1/2 \end{cases}$$

vamos a considerar tres casos. La solución final al problema será la unión de todos los casos.

Caso a): Si $x \in (-\infty, 1/2)$, nos queda

$$\begin{aligned} 4 - x - 2x + 1 &\leq 4 \\ -3x &\leq -1 \\ x &\geq 1/3 \end{aligned}$$

y por lo tanto, la solución al caso a) es $x \in (-\infty, 1/2) \cap [1/3, \infty) = [1/3, 1/2)$.
Caso b): Si $x \in [1/2, 4]$, nos queda

$$\begin{aligned} 4 - x + 2x - 1 &\leq 4 \\ x + 3 &\leq 4 \\ x &\leq 1 \end{aligned}$$

y por lo tanto, la solución al caso b) es $x \in [1/2, 4] \cap (-\infty, 1] = [1/2, 1]$.
Caso c): Si $x \in (4, \infty)$, nos queda

$$\begin{aligned} -4 + x + 2x - 1 &\leq 4 \\ 3x &\leq 9 \\ x &\leq 3 \end{aligned}$$

y por lo tanto, la solución al caso c) es $x \in (-\infty, 3] \cap (4, \infty) = \emptyset$.
En consecuencia, la solución final de la desigualdad es el intervalo

$$[1/3, 1/2) \cup [1/2, 1] \cup \emptyset = [1/3, 1].$$

Respuesta 3:

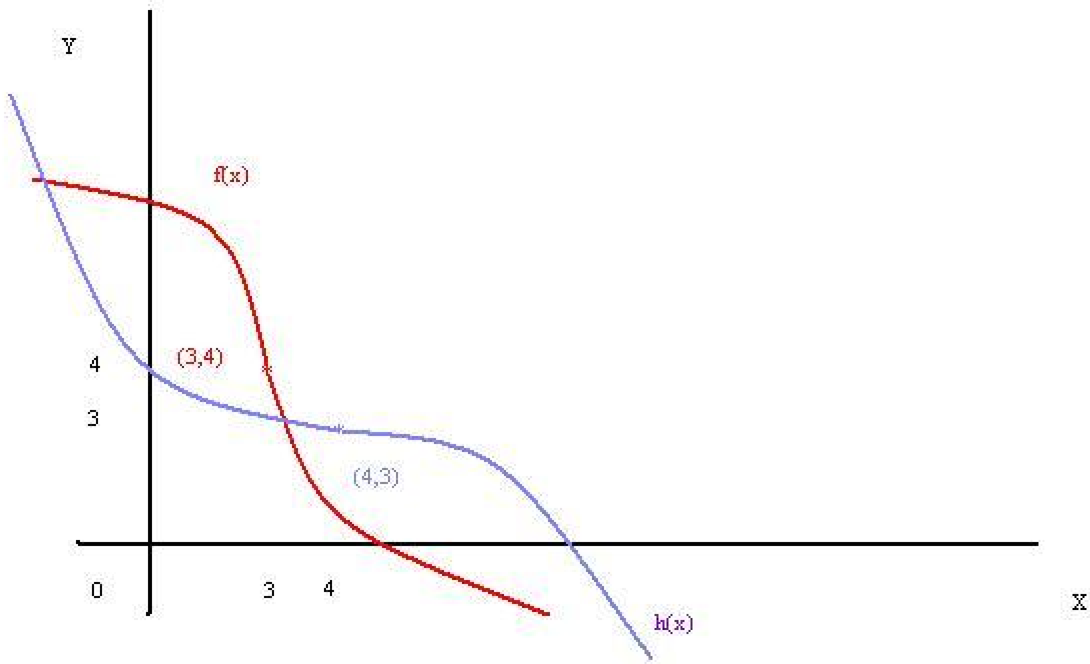
a) $f(x) = 4 - \sqrt[3]{x-3}$ es inyectiva si verifica que dados dos valores a y b, tales que $f(a) = f(b)$, entonces $a = b$.
Supongamos que $f(a) = f(b)$. Ahora, sumando -4 a ambos lados de la igualdad, multiplicando por -1 y luego aplicando la función $g(y) = y^3$, obtenemos que

$$\begin{aligned} 4 - \sqrt[3]{a-3} &= 4 - \sqrt[3]{b-3} \\ -\sqrt[3]{a-3} &= -\sqrt[3]{b-3} \\ \sqrt[3]{a-3} &= \sqrt[3]{b-3} \\ a - 3 &= b - 3. \end{aligned}$$

Finalmente, sumando 3 a ambos lados de la última igualdad, concluimos que $a = b$.

b) Si denotamos por $y = 4 - \sqrt[3]{x-3}$ tenemos que $y - 4 = -\sqrt[3]{x-3}$ y por lo tanto, $-y + 4 = \sqrt[3]{x-3}$, así $(-y+4)^3 = x - 3$, lo que nos permite expresar $(-y+4)^3 + 3 = x$ y en conclusión

$$f^{-1}(x) = (4 - x)^3 + 3.$$



Y
f(x)
4
(3,4)
3
(4,3)
0
3
4
X
h(x)

c) Gráficas de f y $h = f^{-1}$ (ver página anterior)

Respuesta 4:

Para que la función $f(g(x))$ tenga sentido, necesitamos que

$$\mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Rang}(g) \neq \emptyset.$$

Dado que $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$ y $\mathrm{Rang}(g) = [0, \infty)$, obtenemos que

$$\mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Rang}(g) = [0, \infty) \cap \mathbb{R} = [0, \infty) \neq \emptyset.$$

Ahora, observando que $g(x) = (x-7)^2$ y sustituyendo formalmente en la definición de f, tenemos que podemos expresar

$$f(g(x)) = \begin{cases} (x-7)^2, & \text{si } (x-7)^2 < 0, \\ \sqrt{(x-7)^2}, & \text{si } (x-7)^2 \geq 0. \end{cases}$$

Como la desigualdad $(x-7)^2 < 0$ tiene por solución $\emptyset$ y además $(x-7)^2 \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, concluimos que $f(g(x)) = |x-7|$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

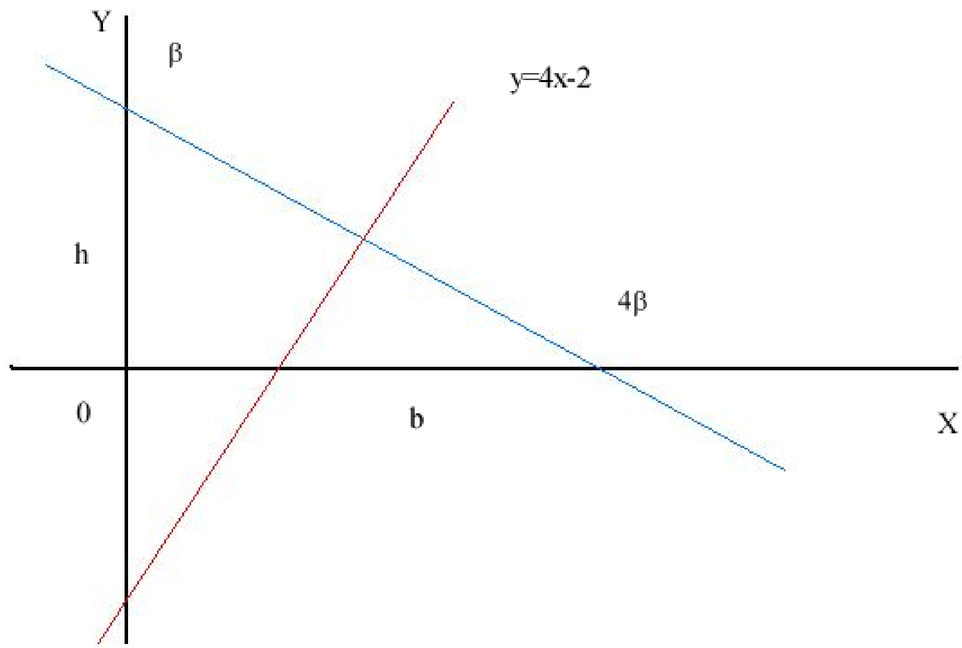
Respuesta 5:

Dado que la recta buscada es ortogonal a $y = 4x - 2$, su ecuación deberá ser de la forma $y = -\frac{x}{4} + \beta$, con β a determinar.

Por una parte, sabemos que el área del triángulo es $A = b.h/2$, donde $b = 4\beta$ y $h = \beta$ y por otra parte, $A = 8$.

En consecuencia, al igualar las áreas, obtenemos que $\beta^2 = 4$, lo que implica que escogemos $\beta = 2$. En conclusión, la ecuación de la recta buscada es $y = -\frac{x}{4} + 2$.

Planteamiento gráfico:


Y
β
y=4x-2
h
4β
0
b
X